

**TD N°6 : Analyse I
MIPC-GEGM**

Exercice 1:

Calculer les intégrales généralisées suivante :

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx & ; \quad b) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} dx \\ c) \int_a^{+\infty} \frac{1}{x(x+r)} dx \quad (a > 0; r > 0) & ; \quad d) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \end{array}$$

Exercice 2 :

- 1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \tan(x) dx$ diverge
- a) Par un calcul de primitive.
 - b) Par le critère de Riemann.

Exercice 3 :

Etudier en fonction du paramètre réel α la convergence des intégrales suivantes :

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^\alpha} \quad ; \quad b) \int_0^1 \frac{\cos^\alpha(\pi t/2)}{\sqrt{t(1-t)}} dt$$

Exercice 4 :

- 3) Montrer que les intégrales suivantes sont semi-convergentes :

$$a) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \quad ; \quad b) \int_x^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

Exercice 5 :

- 1) Soit ;

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$$

- a) Montrer que l'intégrale I converge.
- b) Pour $\varepsilon > 0$, établir la relation :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

- c) En déduire la valeur de I .

Exercice 6:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

2. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$

3. $y' + y = xe^{-x}$

Exercice 7 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$

2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$; sur $] -1, +\infty[$

3. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$

Exercice 8 :

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$

2. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$

3. $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + xe^{2x} \cos(x)$

Exercice 1

$$a/ \int_0^A \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int_0^A (\arctan x)' \arctan x dx = \left[\frac{\arctan^2 x}{2} \right]_0^A = \frac{\arctan^2 A}{2}$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan^2 A = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{donc} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad \text{converge vers} \quad \frac{\pi^2}{8}$$

$$b/ \int_1^A \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{1+x} \right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{x(1+x)} dx \quad \begin{cases} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{(1+x)^2} & v = -\frac{1}{1+x} \end{cases}$$

$$= -\frac{\ln A}{1+A} + \int_1^A \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = -\frac{\ln A}{1+A} + [\ln x - \ln(x+1)]_1^A$$

$$= -\frac{\ln A}{1+A} + \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) + \ln 2$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln A}{1+A} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) = 0 \quad \text{d'où l'intégrale} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$$

converge vers $\ln 2$

$$c/ \int_a^A \frac{1}{x(x+r)} dx = \frac{1}{r} \int_a^A \frac{1}{x} - \frac{1}{x+r} dx = \frac{1}{r} [\ln x - \ln(x+r)]_a^A$$

$$= \frac{1}{r} [(\ln A - \ln(A+r)) - (\ln a - \ln(a+r))] = \frac{1}{r} \left(\ln \frac{A}{A+r} - \ln \frac{a}{a+r} \right)$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{A}{A+r} = 0 \quad \text{d'où} \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x(x+r)} dx = \frac{1}{r} \ln \frac{a+r}{a}$$

$$d/ \text{Posons} \quad I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

$$\text{Posons} \quad \begin{cases} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{cases} \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$I_n = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -n x^{n-1} e^{-x} dx \Rightarrow I_n = n \cdot I_{n-1}$$

$$\text{en effet} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x e^{-\frac{x}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\left(\frac{x}{n} e^{-\frac{x}{n}} \right) \cdot n \right)^n = 0$$

On a

$$I_n = n \cdot I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = (n-1) I_{n-2}$$

$$I_{n-2} = (n-2) I_{n-3}$$

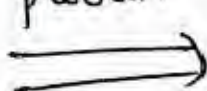
$$\vdots$$

$$I_3 = 3 \cdot I_2$$

$$I_2 = 2 \cdot I_1$$

$$I_1 = 1 \cdot I_0$$

produit



$$I_n = n(n-1)(n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\Rightarrow I_n = n!$$

Exercice 2

$$a/ \int_0^A \tan x \, dx = \int_0^A \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int_0^A \frac{-(\cos x)'}{\cos x} \, dx =$$

On $\lim_{A \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\cos x| = 0^+$ d'où $\lim_{A \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\ln |\cos x|| = +\infty$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$ diverge.

Exercice 3

$$a/ I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \int_1^2 \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} + \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$$

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^2 \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \int_\varepsilon^2 (\ln t)' (\ln t)^{-\alpha} dt = \left[\frac{(\ln t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_\varepsilon^2 = \frac{1}{1-\alpha} \left((\ln 2)^{1-\alpha} - (\ln \varepsilon)^{1-\alpha} \right)$$

$$\text{De même } I_A = \int_2^A \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left((\ln A)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha} \right)$$

1° cas si $\alpha > 1$ alors $1-\alpha < 0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A)^{1-\alpha} = 0$; $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1^+} (\ln \varepsilon)^{1-\alpha} = +\infty$

donc I_A c.v et I_ε div donc I diverge

2° cas si $\alpha < 1$ alors $1-\alpha > 0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A)^{1-\alpha} = +\infty$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1^+} (\ln \varepsilon)^{1-\alpha} = 0$

donc I_A div et I_ε c.v donc I diverge

3° cas si $\alpha = 1$ alors I diverge

b/ Au voisinage de 0 : $f(t) = \frac{\cos^\alpha(\frac{\pi}{2}t)}{\sqrt{t(1-t)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}$

$\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1/2}} dt$ c.v pour $\alpha = 1/2 < 1$ donc $\int_0^{1/2} f(t) dt$ converge

Au voisinage de 1 : Posons $T = 1-t$ alors :

$$\int_{1/2}^1 \frac{\cos^\alpha(\frac{\pi}{2}t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt = - \int_{1/2}^0 \frac{\cos^\alpha(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}T)}{\sqrt{T(1-T)}} dT = \int_0^{1/2} \frac{\sin^\alpha(\frac{\pi}{2}T)}{\sqrt{(1-T)T}} dT$$

E2465

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$$

TD N°6 Analyse 1



a) Au voisinage de 0 : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-e^{-t} + 2e^{-2t}}{1} = 1$ (Règle de L'Hôpital)

donc $f(t) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ est prolongeable par continuité au point 0

d'où f est intégrable sur $[0, 1]$

• Au voisinage de $+\infty$: $\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = \frac{e^{-t}(1 - e^{-t})}{t} \sim \frac{e^{-t}}{t}$

$$\int_1^A \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_1^A - \int_1^A \frac{e^{-t}}{t^2} dt = -\frac{e^{-A}}{A} + e^{-1} - \int_1^A \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{t} & u' = -\frac{1}{t^2} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{e^{-A}}{A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{Ae^A} = 0 ; \int_1^A \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \int_1^A \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^A = 1 - \frac{1}{A}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ C.V. donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ C.V. $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ C.V.
d'où la convergence de I

b) $\int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-2t}}{t} dt$

Pose $u = 2t$ alors $\int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_{2\varepsilon}^{2A} \frac{e^{-u}}{\frac{u}{2}} \frac{du}{2} = \int_{2\varepsilon}^{2A} \frac{e^{-u}}{u} du$

d'où $\int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{2\varepsilon}^{2A} \frac{e^{-u}}{u} du$

$$= \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{2\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_A^{2A} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{\varepsilon}^{\frac{2\varepsilon}{2}} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_A^{\frac{2A}{2}} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

On a $\int_A^{2A} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \frac{1}{A} \int_A^{2A} e^{-t} dt = \frac{1}{A} [e^{-2A} - e^{-A}]$ ($A \leq t \leq 2A \Rightarrow \frac{1}{2A} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{A}$)

Par passage à la limite en $+\infty$: $\frac{e^{-2A}}{A} \rightarrow 0$ et $\frac{e^{-A}}{A} \rightarrow 0$ donc le membre de droite tend vers 0.

c) On a : $\varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon \Rightarrow e^{-2\varepsilon} \leq e^{-t} \leq e^{-\varepsilon} \Rightarrow \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-2\varepsilon}}{t} dt \leq \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{t} dt$

$$\Rightarrow e^{-2\varepsilon} [\ln t]_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \leq I_{\varepsilon} \leq e^{-\varepsilon} [\ln t]_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \Rightarrow e^{-2\varepsilon} \ln 2 \leq I_{\varepsilon} \leq e^{-\varepsilon} \ln 2 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon} = \ln 2 \text{ donc } I = \ln 2$$

Au voisinage de $T=0$: $\frac{\sin^d(\frac{\pi}{2}T)}{\sqrt{(1-T)T}} \sim \frac{(\frac{\pi}{2}T)^d}{\sqrt{T}} = (\frac{\pi}{2})^d \cdot \frac{1}{T^{1/2-d}}$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{T^{1/2-d}} dT \text{ c.v.} \Leftrightarrow \frac{1}{2}-d < 1 \Leftrightarrow d > -\frac{1}{2}$$

Alors pour $d > -\frac{1}{2}$: $\int_{1/2}^1 f(t) dt$ c.v. et par suite $\int_0^1 f(t) dt$ c.v.

Exercice 4 a/* Posons $\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \\ v' = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -\frac{1}{2} x^{-3/2} \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\int_{-\pi}^A \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right]_{-\pi}^A + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^A \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx = \frac{\sin A}{\sqrt{A}} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^A \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$$

On a $\left| \frac{\sin A}{\sqrt{A}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{A}} = 0$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\sin A}{\sqrt{A}} = 0$

$\int_{-\pi}^A \left| \frac{\sin x}{x^{3/2}} \right| dx \leq \int_{-\pi}^A \frac{1}{x^{3/2}} dx$ et $\int_{-\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ c.v. ($d = \frac{3}{2} > 1$) donc $\int_{-\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$

est absolument c.v. donc convergente d'où la convergence de $\int_{-\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$

* $\int_{-\pi}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx$

On pose $t = x - k\pi$ alors $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\cos(t+k\pi)|}{\sqrt{t+k\pi}} dt = \int_0^{\pi} \frac{|\cos t|}{\sqrt{t+k\pi}} dt$

Or $0 \leq t \leq \pi \Rightarrow k\pi \leq t+k\pi \leq \pi+k\pi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \geq \frac{1}{\sqrt{t+k\pi}} \geq \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}$

de plus $\int_0^{\pi} |\cos t| dt = \int_0^{\pi/2} \cos t dt + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos t dt = [\sin t]_0^{\pi/2} - [\sin t]_{\pi/2}^{\pi} = 2$

d'où $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \geq \int_0^{\pi} \frac{|\cos t|}{\sqrt{(k+1)\pi}} dt = \frac{2}{\sqrt{(k+1)\pi}}$

et par suite $\int_{-\pi}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{\sqrt{(k+1)\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$

(Cours Analyse 2 : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ diverge donc $\int_{-\pi}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx$ diverge)

b/ On pose $u = x^2$ alors $du = 2x dx$ d'où $\int_{-\pi}^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_{-\pi^2}^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$

Même chose que l'exemple a/



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Diapo
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..